Prof. Dr. Alfred Toth

Qualitative semiotische Zahlentheorie II

1. In Toth (2009b) sind wir von den Peirceschen triadischen Zeichenklassen ausgegangen und haben sie mittels Wert-, Positions- und Iterationsabstraktion auf ihre Proto-, Deutero- und Trito-Strukturen zurückgeführt. Erwartungsgemäss war das Ergebnis nicht die Menge der qualitativen Zahlen der ersten Kontexturen, wie sie z.B. bei Kronthaler (1986, S. 33 f.) aufscheinen, sondern die Menge der dergestalt dreifach reduzierten Zeichenklassen ist einerseits nur ein kleines Fragment der qualitativen Zahlen, geht anderseits aber bereits stark über die qualitativen Zahlen der ersten Kontexturen hinaus. Bei unserem Vorgehen der dreifachen Reduktion von Zeichenklassen hatten wir ja auch nur die Trichotomischen Triaden aufgehoben und also die aus Dyaden zusammengesetzten triadischen Relationen als Hexaden behandelt, aber die übrigen Peirceschen Limitationstheoreme waren bestehen geblieben. Es sind die folgenden:

1. Die paarweise Verschiedenheit der Fundamentalkategorien:

   ZR = (1, 2, 3) mit $1 \neq 2$, $2 \neq 3$ und $1 \neq 3$.

2. Die Verschachtelung der triadischen Relation, d.h. die Menge als Meta-Relation oder die Meta-Menge als Relation:

   $ZR = (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))$.

3. Die Begrenzung auf triadische Relationen nach oben und nach unten:

   $ZR = (0, 1, 2, \leftarrow \boxed{3} \rightarrow, 4, 5, 6, ...)$

Im Zusammenhang mit 3. stellt auch sich die Frage nach dem Verhältnis von der Stelligkeit (n-adizität) semiotischer Relationen und der Anzahl benötigter Kontexturen. Obwohl es keine absolute Regel gibt – man kann z.B. eine dyadische Relation wie (12) in einem 10-kontexturalen Morphogramm darstellen: (0000000012), man kann umgekehrt sogar eine enneadische Relation wie (123456789) in einem 2-kontexturalen Morphogramm darstellen: (79), ist es einleuchtend, dass im Idealfall die Anzahl Konturen für eine n-adische Relation minimal n und optimal (n+1) beträgt. Das geht also zusammen mit Kaehrs

Kontexturierung der triadischen Peirceschen Zeichenrelation in K = 3 bzw. K = 4 (Kaehr 2008). Wir formulieren deshalb als 4. aufzuhebendes semiotisches Limitationstheorem:

4. Die Abhängigkeit der Kontexturen von der Stelligkeit der Relation.

2.1. Wenn wir also (1.) die paarweise Verschiedenheit der Relationen aufheben, werden wir Zeichen bekommen, die z.B. kein Mittel, kein Objekt oder keinen Interpretanten haben. Dass es solche Zeichen gibt, darauf wurde schon früher hingewiesen (Toth 2008a, b, c). Es ist sogar so, dass ja die Unterscheidung von Mittel, Objekt und Interpretant eigentlich nur aus der Idee der Triadizität folgt, die seinerseits, wie Günther bei Peirce nachgewiesen hat, in der Trinität gründet (Günther 1978, S. 12). D.h. wäre Peirce also von der vor der christlichen 3-Zahl (Trinität) weltweit verbreiteten 4-Zahl (Quaternität) ausgegangen, die ja bekanntlich auch in der Bibel weit verbreitet ist (die 4 Weltrichtungen, Himmelsgegenden, Paradiesströme, apokalyptischen Reiter, Planeten (Jupiter, Merkur, Mars, Saturn), Sonnenrosse, Gesichter (Ezechiel 1), dann die 4 Haupttugenden, Gliedmassen, Welalter, Jahreszeiten, Tageszeiten, Nachtwachen, Farben des Kartenspiels, usw., vgl. Bischof 1997, S. 200 ff.), dann hätte er notwendig wohl nicht nur eine vierte, sondern vier völlig neue Fundmentalkategorien gebraucht. Tatsächlich gibt es eine solche Semiotik, die nicht einfach eine tetradische Relation aus M, O, I, ? darstellt, sondern durch B(a, l, g, x) definiert ist, worin B die Bedeutungsrelation ist (d.h. die Zeichenrelation wird als Bedeutungsrelation eingeführt), a der Name ist, der in der Sprache l den Gehalt g eines Dinges x formalisiert (Menne 1992, S. 55). Versuchen wir also, die Mennesche tetradische Bedeutungsrelation im Rahmen der Peirce-Semiotik darzustellen! Der Name a ist M, der Mittelbezug, die Sprache l, d.h. ein Repertoire, fehlt bei Peirce. Da M daraus selektiert wird, muss l = {M} sein, wobei wir allerdings $\{M\}_1$ setzen sollten, da es ja mehr als eine Sprache/ein Repertoire gibt und ein M, selektiert aus einem falschen Repertoire, nach Menne die Bedeutungsrelation nicht erfüllt. Damit kommen wir zu g, dem Gehalt eines Dinges x. Dies ist offenbar die Relation zwischen einem realen Objekt und der Bedeutungsfunktion (O → I). Da das reale Objekt bei Peirce nicht vorkommt, wollen wir es mit Ω abkürzen. Damit können wir die Peircesche triadische Zeichenrelation

ZR = (M, O, I)

der Menneschen tetradischen Bedetungsrelation

$BR = (a, l, g, x) = (M, \{M\}_1, ((O \rightarrow I) \leftrightarrow \Omega))$

gegenüberstellen. Wie man sogleich erkennt, haben die beiden Zeichenrelationen nicht das geringste miteinander gemeinsam, obwohl wir sie versuchsweise ineinander übersetzt haben. Es wäre eine interessante Aufgabe, einmal zu überlegen, wie viele verschiedene einnander nicht-isomorphe Definitionen von Zeichenrelationen es gibt.

2.2. Wäre also Peirce z.B. von der Menneschen tetradischen Relation ausgegangen, hätte er wegen $a \in l$ nicht mit paarweiser Verschiedenheit von Kategorien operieren können, davon abgesehen, dass weder a noch l sensu stricto Kategorien sind, genauso wenig wie ein Lemma in einem Wörterbuch einer bestimmten Sprache und das Wörterbuch selbst als Kategorien bezeichnet werden können. Schwieriger ist es bei g und x. Wenn man diese komplexe Relation in diejenige von Peirce übersetzt, d.h. $((O \rightarrow I) \leftrightarrow \Omega)$, dann ergibt sich ein Bezug zwischen O und Ω, die zwar als Kategorien – O ist eine semiotische und Ω ist ihre korrespondierende ontologische Kategorie -, aber sonst keineswegs paarweise verschieden sind, insofern hier ja gerade eine semiotische Relation zwischen dem äusseren (Ω) und dem inneren (O) bezeichneten Objekt, oder Peirceianisch gesprochen: zwischen Objekt und Objektbezug hergestellt wird.

2.3. Ein weiteres Beispiel einer triadischen Relation, die sogar stets mit der Peirceschen Zeichenrelation identifiziert wurde, ist die Kommunikationsrelation KR = (O, M, I), vgl. z.B. Bense (1971, S. 39 ff., 1976, S. 26 f.). Davon abgesehen, dass hier die Reihenfolge der Primzeichen nicht mit der von ZR = (M, O, I) übereinstimmt, ist die Identifikation von O mit dem Expedienten, von I mit dem Rezipienten und von M mit dem Kanal des Kommunikationsschemas gewalttätig. Wie kann ein totes Objektes Information aussenden? Warum ist nicht der Sender ein I1 und der Empfänger ein I2, so wie es jedes Kind erwarten würde, das schon einmal Telephönli gespielt hat? Wie kann ein Mittel als 1-stellige Relation 3-stellige Zeichenfunktion ausüben (so behauptet bei Bense 1976, S. 26 unten)?

2.4. Bei einer weiteren triadischen Zeichenrelation, dem bereits auf Peirce zurückgehenden Kreationsschema (vgl. z.B. Bense 1979, S. 87 ff.), ist nicht nur wiederum die Ordnung der Fundamentalkategorien verändert CR = (I, M, O) bzw. (M, I, O), sondern es wird behauptet, dass I und M einer anderen Partialrelation angehören als das „Produkt“ O, und dass I zwei statt eine Funktion ausübt: einerseits selektiert I aus M (genauer müsste hier {M} stehen!), anderseits kreiert es O (aus M). Auch hier sieht die Identifikation der Kreations- und mit der Zeichenrelation höchst artifiziell aus. Hier wird jedenfalls auch behauptet, dass eine Drittheit eine Erstheit auf reichlich mysteriöse Weise in eine Zweitheit verwandeln kann. Man stelle sich vor, so etwas würde in einer mathematischen Abhandlung stehen! Man grabe Erde (M) im Garten aus, sage „Simsalabim!" (I) dazu – und man bekommt Gold (O) wie weiland Rabbi Loew in Prag.

2.5. Verwandte triadische Relationen, die zwar nie mit der Peirceschen Zeichenrelation in Beziehung gebracht wurden, aber immerhin Anwärterschaft darauf haben, sind z.B. Thema/Topik , Comment und Fokus, also die drei Grundbegriffe der Funktionalen Satzperspektive in der neueren Textlinguistik. Ohne grössere Vergewaltigung von Kategorien als es beim Kommunikations- und beim Kreationsschema der Fall war, könnte man hier argumentieren, das Topik sei das Mittel, es fungiere als „Unterlage" der alten und/oder bekannten Information, als dasjenige, worüber etwas ausgesagt werden. Das, was darüber ausgesagt werde, d.h. die neue und/oder unbekannte Information, ist dann der Objektbezug, denn Information ist Mitteilung von Neuem, und Neues kann nur aus der Welt der Objekte kommen, niemals aus der Welt der Zeichen, die ja Objekte nur bezeichnen, aber niemals erzeugen oder auch nur verändern können (Benses Invarianzprinzip; Bense 1979, S. 39 ff., im Grunde eine hervorragende Begründung der Monokontexturalität der Peirceschen Semiotik). Der Fokus fällt dann auf den Interpretanten, denn dieser lenkt sozusagen das Bewusstsein auf jene Teilmenge der neuen/unbekannten Information, auf die besonders hingewiesen werden soll. Die Frage ist also in unserem Zusammenhang: Kann man die funktionale Triade FR = (T, C, F) nicht auch allgemein als Zeichenmodell verwenden? Sind diese drei „Kategorien" nicht universell, d.h. über die Linguistik hinaus anwendbar? Sie sie wirklich weniger allgemein als die von Peirce stets aufrecht erhaltene „Universalität" der „fundamentalen" Kateogorien? Da wie gesehen haben, dass es Zeichen ohne Mittel gibt, kann man z.B. zeigen, dass es Sätze ohne Topiks gibt, z.B. Märchenanfänge, bei denen ein bestimmtes Konzept ja erst als Topik im Diskurs etabliert werden soll. Da es Zeichen ohne Objekte gibt – kann man auch zeigen, dass es Comment-lose Sätze gibt, das sind Sätze, die nur aus alter/bekannter Information bestehen. Und da es schliesslich Zeichen ohne Interpretanten gibt, kann man auch zeigen, dass es Fokus-lose Sätze gibt – die meisten nämlich. Genauso gibt es Kommunikationsschemata ohne Sender (z.B. Signale), ohne Empfänger (Symptome), ohne Kanal (natürliche Zeichen, Anzeichen), dasselbe gilt für Kreationsschemata und wohl sämtliche triadischen Relationen, die sich als um nicht allgemeiner entpuppen als die angeblich universalen und fundamentalen Peirceschen Kategorien.

2.6. Übrigens ist es eine eigene Überlegung wert, ob wahrhaft universale und fundamentale Kategorien wirklich semiotische und nicht eher universal-metaphysische Kategorien sein müssen, z.B. die ebenfalls bei Peirce auffindbare frühe Triade (Quantität – Qualität – Relation), die nun wirklich ein erstklassiger Kandidat einer universalen und fundamentalen kategorialen triadischen Relation ist. Danach könnte man Zeichen anhand von diesen drei Bestimmungsstücken sicher viel ungezwängter klassifizieren als dort einen Interpreten zu suchen, wo gewiss keiner ist (z.B. bei Eisblumen) oder dort nach einem Mittel zu suchen, wo keines vorhanden ist (bei einer Handbewegung), oder dort nach Objekten zu suchen, wo solche bewusst nicht vorhanden sein sollen (z.B. dadaistische , stochastische Musik, bestimmte Formen der Malerei). Die Triade Quantität – Qualität – Relation ist allein deshalb unversaler, weil sie gar nicht bereits semiotisch ist, sondern viel näher an den Objekten ist, aus denen die Zeichen in der Semiose ja entstehen: Jedes Objekt hat eine gewisse Quantität, Qualität, Relation. Ferner hat man hier bereits eine in der Semiotik erst am Schluss ihrer Entwicklung (Bense 1992) erreichte vollständige Klassifikation der Zahl als Zeichen, nämlich die rein quantitative Zahl (z.B. Peano-Zahl), die qualitative Zahl (Proto-, Deutero-, Trito-Zahl) und die relationale Zahl (Peirce-Zahl; vgl. Toth 2009a), und man sieht bereits hier, dass mit der Aufhebung-Ergänzung der Mathematik der Quantitäten durch die Kronthalersche Mathematik der Qualitäten die Welt der Mathematik noch nicht ausgeschöpft ist – es braucht nämlich noch eine Theorie der Peirce-Zahlen oder semiotischen Relationalzahlen.

3. Wenn wir schliesslich von der Verschachtelung der Zeichenrelation, die diese in eine (gerichtete) Relation von Relationen bzw. Menge von Mengen bzw. Menge von Relationen bzw. Relation von Mengen verwandelt, d..h. von

$$ZR = (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))$$

absehen, dann befreien wir uns von der paradox anmutenden Forderung Peirce, dass gemäss seiner (von der Semiotik primär unabhängigen) „Pragmatischen Maxime“ das Zeichen stets von einem Interpretanten eingeführt und über ein Objekt zu einem Mittel führt, d.h. von der Ordnung ZR = (I, O, M) und der mit ihr in nie auch nur diskutiertem Widerspruch stehenden Normalform-Ordnung von Zeichenklassen ZR = (M, O, I). Damit fallen auch die Fragen nach den Interpretationen der übrigen Permutationen (IMO, MIO, OMI, OIM) wegen. Das Zeichen kann dann überall anfangen, d.h. bei M, O oder I. Mit solchen Tricks operiert ja bereits die Umgangssprache: Die Aussagen:

a) Ein Mittel bezeichnet ein Objekt durch einen Interpretanten.
b) Mit einem Mittel bezeichnet ein Interpretant ein Objekt.
c) Ein Objekt wird mit einem Mittel von einem Interpretanten bezeichnet.
d) Ein Objekt wird von einem Interpretanten durch ein Mittel bezeichnet.
e) Ein Interpretant bezeichnet mit einem Mittel ein Objekt.
f) Ein Interpretant bezeichnet ein Objekt durch ein Mittel.

sind ja gleichbedeutend, d.h. die Ordnung der Kategorien ist egal; das Zeichen kann eben überall beginnen.

Umgekehrt folgt die Aufhebung der Verschachtelung aber bereits aus der Relativierung der Kategorien, v.a. der Aufhebung der paarweisen Differenziertheit der Kategorien und der dadurch eröffneten Möglichkeit, dass eine Zeichenrelation z.B. zwei Mittel, aber keinen Interpretanten, 2 Objekte, aber kein Mittel usw. enthält. Würde man hier an der Verschachtelung festhalten, müsste im Extremfall eine Zeichenklasse aus einer dreifachen Selbstverschachtelung einer einzigen Kategorie bestehen.

4. Obwohl wir bereits am Anfang unserer qualitativen semiotischen Zahltheorie die Trichotomie aufgehoben haben, seien hier in Zusammenhang mit dem letzten Abschnitt noch eine paar Bemerkungen nachgeschoben: Trichotomie entstehen durch kartesische Produktbildung, und kartesische Produktbildung setzt abelsche Gruppen voraus, also ein höchst spezialisiertes mathematisches System, das für qualitative Systeme unerbringlich ist. Z.B. stellt die Mathematik der Qualitäten vom Standpunkt der quantitativen Mathematik aus betrachtet nicht einmal ein Gruppoid dar. Daher verbieten sich Trichotomien für den Aufbau einer qualitativen semiotischen Zahlentheorie von selbst. Anderseits werden Trichotomien aber auch durch die relationale Verschachtelung der Triaden vorbereitet, denn aus ihr folgt, dass eine Erstheit durch 1 weitere, eine Zweitheit durch 2 weitere und eine Drittheit durch 3 weitere Relationen gesättigt werden kann, also

$$
\begin{array}{ccc}
 & & 3 \\
 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 \\
 & & 1
\end{array}
$$

5. Auch das letzte im Rahmen einer qualitativen semiotischen Zahlentheorie aufzuhebende Limitationstheorem, die Begrenzung auf triadische Relationen nach oben und nach unten, folgt natürlich aus der Aufhebung der Forderung nach paarweiser Verschiedenheit der Kategorien, denn wenn Gebilde wie

(111), (222), (333)
(112), (131), (322), usw.

erlaubt sind, gibt es keinen Grund, sie nach „unten“, d.h. in den Bereich der Dyaden und Monaden, oder nach „oben“, d.h. in die Bereiche der Tetraden, Pentaden, Hexaden, usw. zu verlängern (vgl. Toth 2006/08, S. 214 ff.).

6. Nun hatten wir aber in Abschnitt 2 bereits darauf hingewiesen, dass es eine viel universalere und fundamentalere Semiose gibt als ZR = (M, O, I), nämlich die „Grundrelation“

GR = (Qn, Ql, R).

Zusammen mit den Aufhebungen der 4 Limitationstheoreme hindert uns nun nichts daran, sowohl die Anzahl der Qn, Ql als auch der R zu erweitern:

$GR_{max} = (Qn_1, Qn_2, Qn_3, ..., Ql_1, Ql_2, Ql_3, ..., R_1, R_1, R_1, ...)$

Wenn wir verabreden, dass alle Quantitäten in eine einzige Kontextur, K 1, gehören, also so, wie sie von der traditionellen quantitativen Mathematik gehandhabt werden (Hegel-Paraphrase: „alle Qualitäten ... bis auf die eine Qualität der Quantität ... reduziert“), so brauchen wir die Kontexturen K 2, K 3, ..., K n für die Qualitäten, aber auch für die Relationen, da die Subjekte, welche Relationen über Quantitäten und Qualitäten herstellen, natürlich nicht mit den Subjekten identisch sein müssen, welche in die Qualitäten involviert sind. Wegen der Konsequenz 5. aus dem 4. Limitationstheorem folgt dann die Stelligkeit unserer qualitativen semiotischen Relation direkt aus der Anzahl der gewählten Kontexturen. Da eine minimale polykontexturale Logik 3 Kontexturen hat (vgl. z.B. Günther 1980 [1957], S. 1 ff.), wobei hier die Relation natürlich nicht als Kontextur zählt, ergibt sich als minimale semiotische Grundrelation

$GR_{min} = (Qn_1, Ql_2, Ql_3, R_4, R_5)$,

d.h. wir wählen die gleiche Anzahl von relationalen Kontexturen wie qualitativen, so dass beide minimalen Subjekte (ich, du) relational miteinander ausgetauscht werden. Ich möchte übrigens betonen, dass hier die wohl fundamentalste Differenz zwischen einer logischen Relation mit 2 Subjekten der Form

$LR = {}^{3}R(S, S, O)$

und einer semiotischen Relation mit 2 Subjekten der Form

$SR = {}^{5}R(S, S, O)$

besteht, insofern in letzterer die zwei zum Austausch von $S \rightarrow O$ und $O \rightarrow S$ benötigten Relationen selber mitgezählt werden und darum ihren eigene Platz in separaten Kontexturen bekommen. Natürlich können wir nun, wie in der Logik und der klassischen Semiotik, für die Variablen in

$GR_{min} = (Qn_1, Ql_2, Ql_3, R_4, R_5)$

numerische Werte einsetzen:

$Qn = \{0\}$
$Ql = \{1, 2\}$
$R(Ql_1) = \{3\}$
$R(Ql_2) = \{4\}$,

GR_{min} ist also eine 5-kontexturale pentadische Zeichenrelation über 1 Quantität, 2 Qualitäten und 2 Relationen.

7. Damit bekommen wir für GR_{min} 5 + 7 + 52 = 64 „Zeichenklassen" in Form von Morphogrammen, d.h. 5 semiotischen Proto-Zahlen und 7 semiotischen Deutero-Zahlen (rechts):

Nr. 1	00000	Nr. 1	00000
Nr. 2	00001	Nr. 2	00001
Nr. 3	00012	Nr. 3	00011
Nr. 4	00123	Nr. 4	00012
Nr. 5	01234	Nr. 5	00112
		Nr. 6	00123
		Nr. 7	01234

sowie 52 semiotischen Trito-Zahlen (Ausschnitt):

Nr. 1 00000
Nr. 2 00001
Nr. 3 00010
Nr. 4 00011
Nr. 5 00012
Nr. 6 00100
Nr. 7 00101
Nr. 8 00102
Nr. 9 00110
⋮
Nr. 48 01220
Nr. 49 01221
Nr. 50 01222
Nr. 51 01223
Nr. 52 01234,

wobei hier also wie folgt interpretieren können:

Nr. 1: 00000 ist das Zeichen der reinen Quantität, Nr. 2-5 sind die Zeichen der der vermittelten Quantitäten, d.h. der relationalen quantitativen Zahlen. Nr. 6 ist die durch eine Qualität vermittelte Quantität, Nr. 7 die durch eine Qualität vermittelte Quantität als Relation, ..., Nr. 48-51 sind teilvermittelte vollständige Quanti-Qualitäten, Nr. 52 ist ist vollständig vermittelte vollständige Quanti-Qualität, usw. usw.

Bibliographie

Bense, Max, Zeichen und Design. Baden-Baden 1971
Bense, Max, Verittlung der Realitäten. Baden-Baden 1976
Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979
Bischoff, Erich, Mystik und Magie der Zahlen (1920). Neudruck Wiesbaden 1997
Günther, Gotthard, Grundzüge einer neuen Theorie des Denkens in Hegels Logik. 2. Aufl. Hamburg 1978
Kaehr, Rudolf, Diamond Semiotics. http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Diamond%20Semiotics/Diamond%20Semiotics.pdf (2008)

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Menne, Albert, Einführung in die Methodologie. 3. Aufl. Damrstadt 1992

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

Toth, Alfred, Zeichen ohne Zeichenträger. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Zeichen%20ohne%20Z.traeger.pdf (2008a)

Toth, Alfred, Metaobjektivierung ohne Objekt. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Metaobj.%20ohne%20Objekt.pdf (2008b)

Toth, Alfred, Zeichen ohne Zeichensetzer. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Zeichen%20ohne%20Zeichensetzer.pdf (2008c)

Toth, Alfred, Die quantitativ-qualitative Arithmetik der Peirce-Zahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Quant-Qual%20Arithm.pdf (2009a)

Toth, Alfred, Qualitative semiotische Zahlentheorie I. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics (erscheint, 2009b)

25.11.2009